Aspectos Técnicos del Seguro de Vida Grupo

Ricardo Nava FSA, MAAA
Chief Actuary, Latin America
RGA Re
México
Marzo 2010

The security of experience. The power of innovation.

www.rgare.com

Cotización de Seguro de Vida Grupo

1. Evaluación subjetiva del grupo
2. Ajustes por Ocupación, Ubicación, etc.
3. Cálculo de tasa por exposición
4. Cálculo de tasa por experiencia (incluir IBNR)
5. Teoría de Credibilidad
6. Costo de Dividendos
7. Recargos por administración/adquisición

Teoría de Credibilidad

Teoría de Credibilidad

Un grupo puede tener mejor o peor experiencia que el mercado por 2 razones:

1. **Causas Estructurales**
2. **Causas Aleatorias**

La Teoría de Credibilidad nos ayuda a tomar en cuenta esas causas estructurales que no son fáciles de detectar.

Teoría de Credibilidad, Riesgos al Cotizar

1. **Si sólo tomamos la experiencia de un grupo para cotizar (menor tasa que la del mercado)**

   Puede ser que se deba a una desviación aleatoria y la prima sea insuficiente para el siguiente año.

2. **Si ignoramos completamente la experiencia de un grupo al cotizar (menor tasa que la del mercado)**

   Puede ser que efectivamente se deba a causas estructurales y perdamos un negocio bueno.

Teoría de Credibilidad

$P(Z) = ZA + (1-Z)E$

Donde:

Z = Factor de Credibilidad [0,1]

A = Siniestralidad Actual = $\overline{S}$

E = Siniestralidad Estimada

Teoría de Credibilidad

Cálculo de Z, Ejemplo

Tamaño de Grupo	Factor de credibilidad Z
1 – 1,000	0.0
1,001 – 2,000	0.1
2,001 – 3,000	0.2
3,001 – 4,000	0.4
4,001 – 5,000	0.7
> 5,000	0.9

Teoría de Credibilidad, Ejemplo

Número de Asegurados: 3,595

Tasa Teórica: 2.88‰

Siniestralidad Histórica: 2.30‰

Z: 0.4

Tasa Neta = 0.4*2.3 + 0.6*2.88 = 2.648

Teoría de Credibilidad, Modelos

2 modelos en general:

1. **Fluctuación Limitada (Americano)**
   - Credibilidad Total
   - Credibilidad Parcial
2. **Bühlmann (Europeo)**

Ambos utilizan la Teoría Colectiva de Riesgo

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$ ➔ **Dos variables aleatorias: N y X**

Teoría Colectiva de Riesgo

Distribuciones Comunes de Número de Siniestros

	Binomial	Poisson	Binomial Negativa
E[N]	np	λ	rq/p
Var[N]	npq	λ	rq/p^2
(σ^2/μ)	<1	1	>1

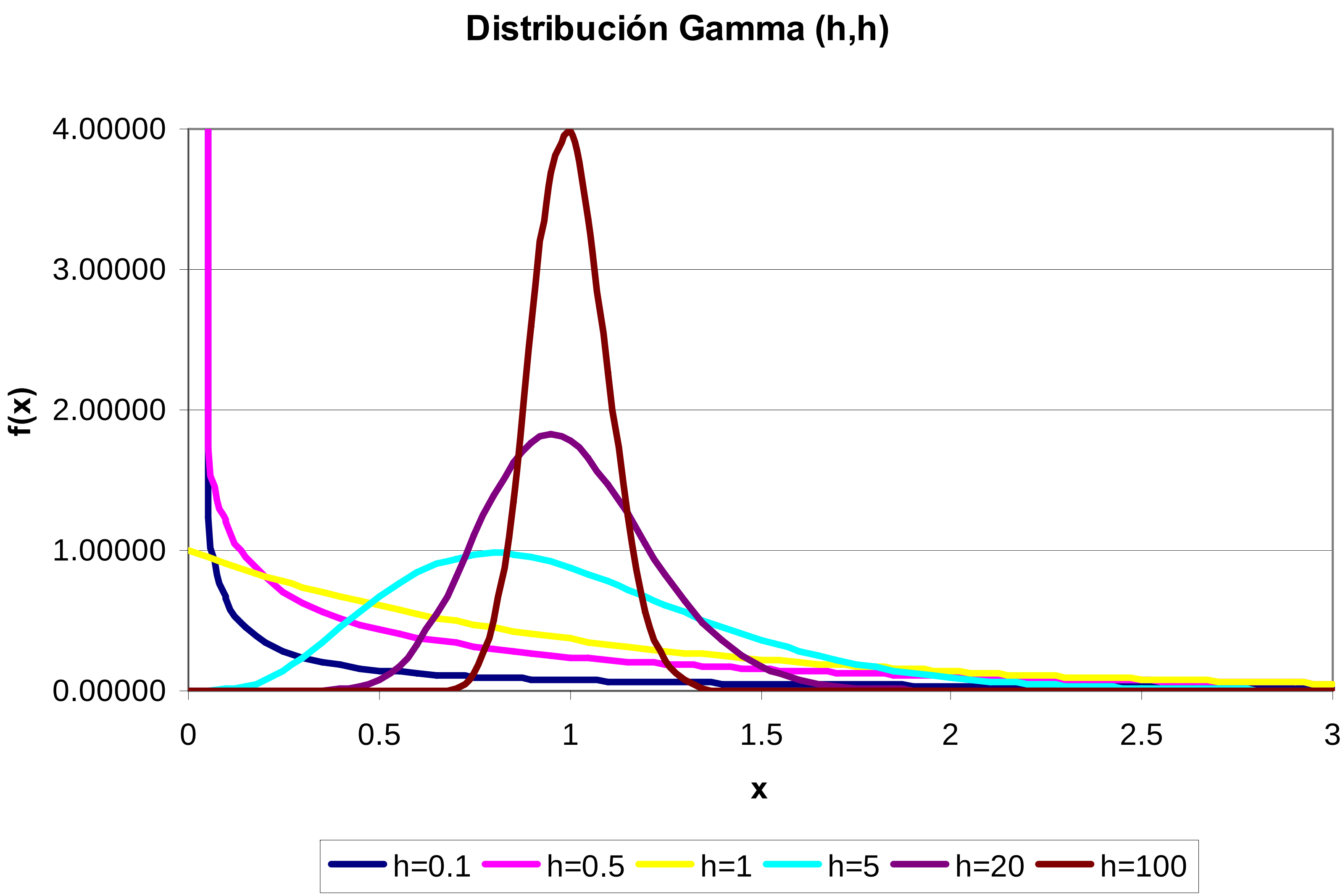
Clase (a,b,0): $\Pr(n) = (a + b/n)\Pr(n-1)$

Distribución Polya (1923)

- Número de siniestros ~ Poisson ($\lambda\theta$), con θ desconocido.
- La variable θ ~ Gamma (h,h)
- $E[N] = E_\theta[E_N[N|\theta]] = \lambda E_\theta[\theta] = \lambda$
- $Var[N] = \lambda + \lambda^2/h$
- Entonces N ~ BN [$r=h$, $p=h/(h+\lambda)$]
- Conforme $h \rightarrow \infty$, $N \rightarrow$ Poisson(λ)

RGA

Distribución Polya (1923)



Teoría Colectiva de Riesgo

Distribuciones Comunes de Monto de Siniestros:

- **Lognormal**
- **Gamma**
- **Constante**
- **Pareto**
- **etc.**

La característica es que son distribuciones no negativas y por lo general continuas.

Estimación de Parámteros por Máxima Verosimilitud

Lognormal

	Moments	Parameters
Mean	11.36	7.48
Variance	0.28	1.69

lnL: -279.01

Prueba de Hipótesis, Chi-Cuadrada

Grados de Libertad	10.00
Valor Crítico	18.31
p-value	0.57

8.615

Límite Inferior	Siniestros	Prob. Acumulada	Probabilidad en Rango	lnL	Lognormal	Chi-cuadrada
50,035	147	0.97599	0.64697	-64.01	148.80	0.0218
100,035	46	0.99152	0.17414	-80.40	40.05	0.8832
150,035	11	0.99570	0.07194	-28.95	16.55	1.8588
200,035	11	0.99743	0.03650	-36.41	8.40	0.8082
250,035	5	0.99831	0.02096	-19.33	4.82	0.0067
300,035	3	0.99881	0.01696	-12.23	3.90	0.2082
370,035	1	0.99922	0.00978	-4.63	2.25	0.6940
440,035	2	0.99945	0.00803	-9.65	1.85	0.0127
540,035	0	0.99965	0.00457	0.00	1.05	1.0510
640,035	1	0.99976	0.00282	-5.87	0.65	0.1910
740,035	2	0.99982	0.00400	-11.04	0.92	1.2646
1,040,035	1	0.99992	0.00153	-6.49	0.35	1.2006
1,340,035	0	0.99996	0.00180	0.00	0.41	0.4146
infinity	0	1.00000	-41.64659	0.00	0	0.0000

Solver Parameters

Set Target Cell: $E$6

Equal To: (•) Max ( ) Min ( ) Value of: 0

By Changing Cells: $C$4:$C$5

Subject to the Constraints:

$C$4 >= 0
$C$5 >= 0

Solve | Close | Guess | Options | Add | Change | Delete | Reset All | Help

Teoría de Credibilidad, Fluctuación Limitada

Mowbray (1914), Whitney (1917)

Credibilidad Total

¿Qué tan grande debe ser la experiencia para qué la tasa a cobrar se base 100% en dicha experiencia?

$$\Pr\left[(1-c)E(S) < S < (1+c)E(S)\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[\frac{-cE(S)}{\sqrt{Var(S)}} < \frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} < \frac{cE(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{cE(S)}{\sqrt{Var(S)}} = y_\alpha$$

Teoría de Credibilidad, Fluctuación Limitada, Ejemplo

N ~ Poisson (λ)

X_i ~ Exponencial (α) ➔ σ_x/μ_x = 1

¿Cuál es el número esperado de siniestros para obtener credibilidad total de tal manera que S se encuentre dentro de un intervalo del 5% de su valor esperado con un 95% de probabilidad?

$$\lambda = \left(\frac{y_\alpha}{c}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2\right] = 2\left(\frac{y_\alpha}{c}\right)^2$$

Por simplicidad, supongamos que y_α= 1.96

➔ λ = 3,073

Suponiendo una q promedio de 3‰ ➔ 1,024,427 años vida

RGA

Teoría de Credibilidad, Fluctuación Limitada

Credibilidad Parcial

¿Qué valor de Z asignar cuando no se tiene credibilidad total?

No hay modelo 100% correcto. Varias versiones sobre el valor de Z.

$$\Pr\left[(Z-c)E(S) < ZS < \left(Z+c\right)E(S)\right] = 1-\alpha$$

ó

$$Var(P(Z)) = E(S) * \left(\frac{c}{y_{\alpha}}\right)^{2}$$

Teoría de Credibilidad, Fluctuación Limitada

Del libro: Loss Distributions, Klugman et al

Referente a Teoría de Credibilidad Parcial con Fluctuación Limitada:

A variety of arguments have been used for developing the value of Z, many of which lead to the same answer. All of them are flawed in one way or another.

Teoría de Credibilidad, Bühlmann

$$Z = \frac{n}{n+k}, \quad \text{donde} \quad k = \frac{v}{a} = \frac{E\left[Var\left(S_j \mid \Theta\right)\right]}{Var\left[E\left(S_j \mid \Theta\right)\right]}$$

El objetivo es minimizar:

$$E\left\{\left[\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j S_j\right]^2\right\}$$

Modelo

- $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$
- Número de siniestros ~ Poisson ($\lambda\theta$), con θ desconocido.
- La variable θ ~ Gamma (r,r)
- X_i ~ distribución conocida (por definir)
- S_1, …, S_N son iid dado θ.

$$E[N] = \lambda \qquad Var[N] = \lambda + \frac{\lambda^2}{r}$$

Factor de Credibilidad

Número de siniestros ~ Poisson ($\lambda\theta$), con θ desconocido.

Distribución X_i	**Exponencial (α)**	**Gamma(α,β)**	**Constante**
Factor Z	$\dfrac{n\lambda}{2r+n\lambda}$	$\dfrac{n\lambda}{\left(\dfrac{1+\alpha}{\alpha}\right)r+n\lambda}$	$\dfrac{n\lambda}{r+n\lambda}$

Donde n es el número de años vida utilizados en la experiencia

Factor de Credibilidad

E[N] = 3º/oo * Número de Años Vida

r = 25

			Factor de Z					
Años Vida		Años Vida Promedio	Exponencial	Constante	Gamma (α = 2)	E[N]	Var[N]	σ(N)
-	1,000							
1,001	2,000	1,501	8%	15%	11%	5	5.4	2.3
2,001	3,000	2,501	13%	23%	17%	8	9.9	3.1
3,001	5,000	4,001	20%	33%	24%	12	18.0	4.2
5,001	7,000	6,001	27%	42%	33%	18	31.4	5.6
7,001	10,000	8,501	34%	51%	41%	26	52.3	7.2
10,001	15,000	12,501	43%	60%	50%	38	95.3	9.8
15,001	20,000	17,501	51%	68%	59%	53	165.5	12.9
20,001	30,000	25,001	60%	75%	67%	76	305.3	17.5
30,001	50,000	40,001	71%	83%	76%	121	708.8	26.6
50,001	100,000	75,001	82%	90%	86%	227	2,293.0	47.9
100,001	150,000	125,001	88%	94%	91%	379	6,116.9	78.2
150,001	200,000	175,001	91%	95%	93%	530	11,776.9	108.5
200,001	300,000	250,001	94%	97%	95%	758	23,709.8	154.0
300,001	400,000	350,001	95%	98%	97%	1,061	46,047.0	214.6
400,001	500,000	450,001	96%	98%	97%	1,364	75,729.0	275.2
500,001	600,000	550,001	97%	99%	98%	1,667	112,755.6	335.8

Factor de Credibilidad

E[N] = 3º/oo * Número de Años Vida

r = 5

Años Vida		Años Vida Promedio	Factor de Z Exponencial	Constante	Gamma ($\alpha = 2$)	E[N]	Var[N]	σ(N)
-	1,000							
1,001	2,000	1,501	31%	48%	38%	5	8.7	2.9
2,001	3,000	2,501	43%	60%	50%	8	19.1	4.4
3,001	5,000	4,001	55%	71%	62%	12	41.5	6.4
5,001	7,000	6,001	65%	78%	71%	18	84.3	9.2
7,001	10,000	8,501	72%	84%	77%	26	158.4	12.6
10,001	15,000	12,501	79%	88%	83%	38	324.8	18.0
15,001	20,000	17,501	84%	91%	88%	53	615.4	24.8
20,001	30,000	25,001	88%	94%	91%	76	1,223.4	35.0
30,001	50,000	40,001	92%	96%	94%	121	3,059.2	55.3
50,001	100,000	75,001	96%	98%	97%	227	10,555.9	102.7
100,001	150,000	125,001	97%	99%	98%	379	29,069.3	170.5
150,001	200,000	175,001	98%	99%	99%	530	56,763.6	238.3
200,001	300,000	250,001	99%	99%	99%	758	115,519.2	339.9
300,001	400,000	350,001	99%	100%	99%	1,061	225,993.2	475.4
400,001	500,000	450,001	99%	100%	99%	1,364	373,190.8	610.9
500,001	600,000	550,001	99%	100%	100%	1,667	557,112.0	746.4

Costo de Dividendos

Dividendos en Exp. Propia

$$D = Max(0, xP - S)$$

$$E(D) = \int Max(0, xP - S) f_S(s) ds \neq Max(0, xP - E(S))$$

Donde:

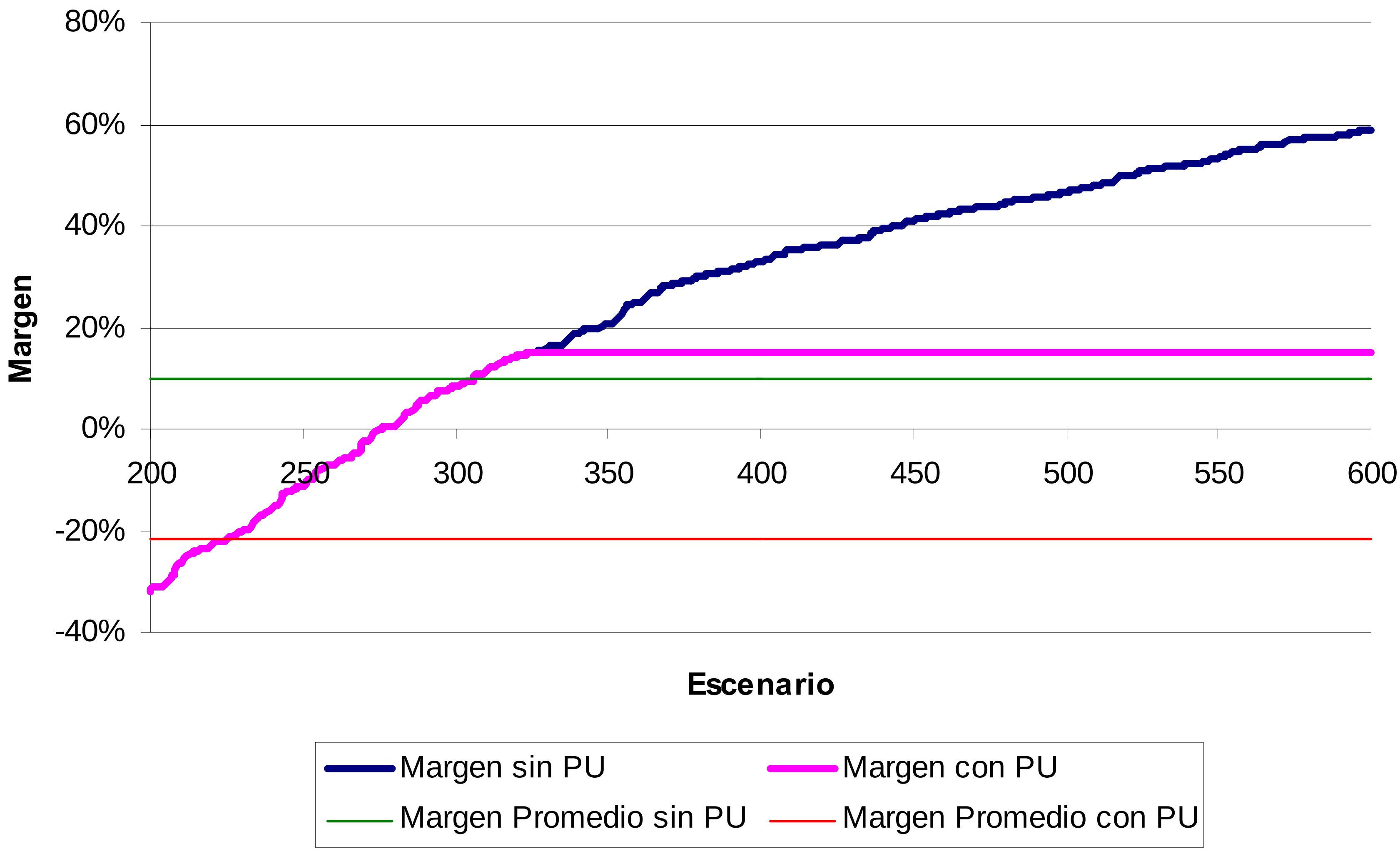
D = Dividendo

x = Porcentaje Máximo de dividendo a otorgar.

P = Prima Neta pagada por el grupo asegurado

S = Monto total de siniestros

Dividendos en Exp. Propia



Dividendos en Exp. Propia

Métodos para calcular el costo de dividendos:

1. **Montecarlo**
2. **Calcular la distribución compuesta $F_S(S)$. Ejemplo: Método recursivo de Panjer**
3. $(1\text{-}x)P = E(S\text{-}xP) = E_N[E(S\text{-}xP|N)]$

Montecarlo

1. **Agrupar en celdas riesgos homogéneos. En Vida Grupo esto significa misma edad y SA similar.**
2. **Generar una variable aleatoria U(0,1)**
3. **Para cada celda, modelar el número de siniestros por cada beneficio cubierto de manera estocástica usando una distribución Binomial con los parámetros igual al número de asegurados en la celda y la qx de la edad en esa celda. Si**

   $F(n-1) < U \leq F(n)$, entonces n es el número de siniestros
4. **Cuando se repite el proceso para todas las celdas se ha generado aleatoriamente siniestros por 1 año**
5. **Repetir los pasos anteriores para crear suficientes años de experiencia de tal manera que los resultados converjan.**

Ejemplo Montecarlo

Poisson con $\lambda = 2$

n	Pr(N=n)	Pr(N<=n)	U(0,1)	N
0	0.1353	0.1353	0.644938	2
1	0.2707	0.4060	0.163271	1
2	0.2707	0.6767	0.407988	2
3	0.1804	0.8571	0.934826	4
4	0.0902	0.9473	0.565559	2
5	0.0361	0.9834	0.225369	1
			Promedio	2

Método Recursivo de Panjer

Supuestos:

1. **N ~ Distribución *p()* Clase (a,b,0)**
2. **X_i ~ Distribución *g()* no negativa, discreta y equidistante; i.e. de la forma:**

$$X_i = iM,\ g_i = \text{Prob}\{X = iM\} \quad (i = 0,1,2,\ \dots,\ r)$$

Entonces: $f_j = \text{Prob}\{S = jM\}$

$$f_j = \frac{1}{1 - a \cdot g_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{i \cdot b}{j} \right) \cdot g_i \cdot f_{j-i}$$

con valor inicial:

$$f_0 = \begin{cases} p_0 & \text{si } g_0 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot g_0^i & \text{si } g_0 > 0 \end{cases}$$

RGA

Reglamento de Seguro de Grupo

Seguro de Grupo en México

Los Dividendos que, en su caso se otorguen, se calcularán considerando la Experiencia Propia del Grupo o Colectividad, o la Experiencia Global de la Aseguradora de que se trate, lo que se justificará en la nota técnica respectiva al momento del registro del producto de Seguro de Grupo o del Seguro Colectivo. Se entenderá por:

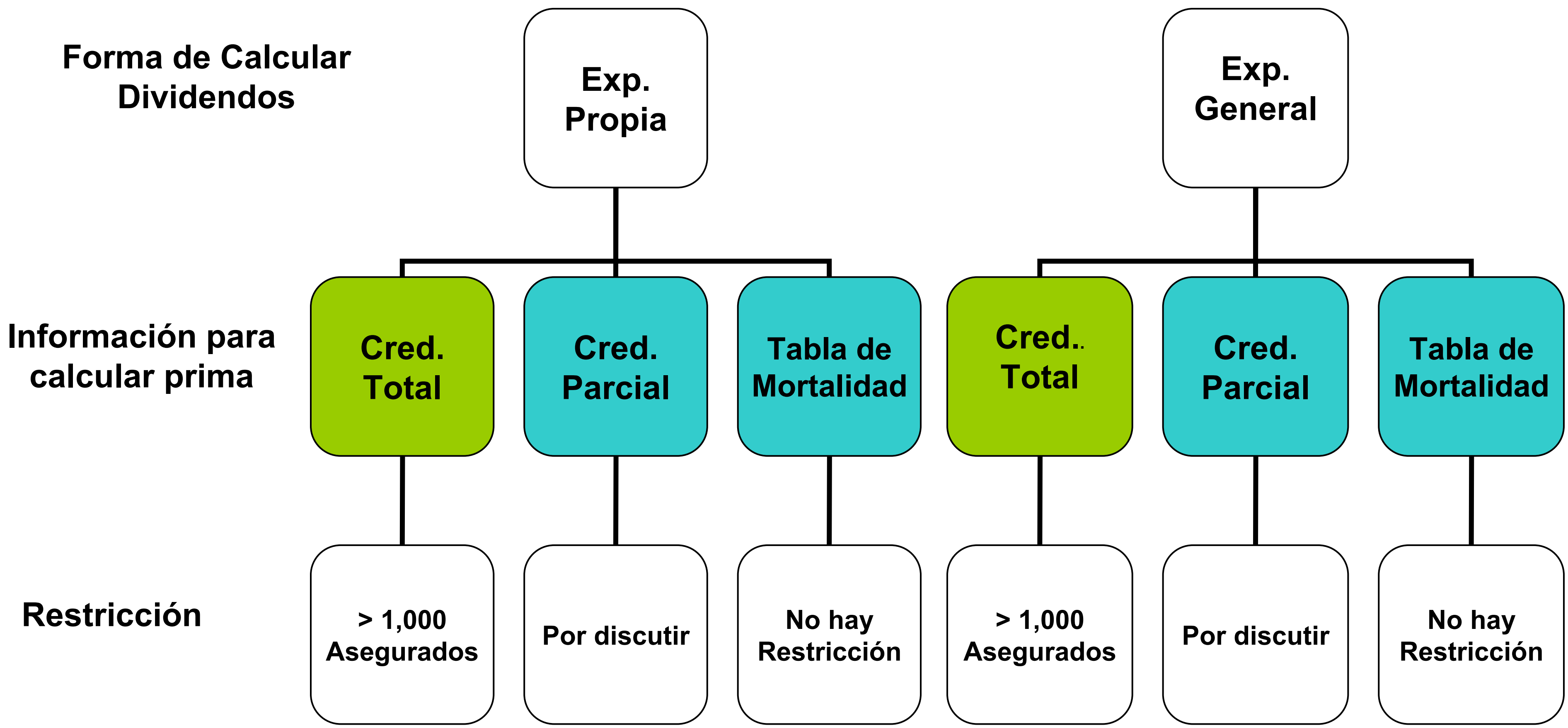
•Experiencia Propia, cuando la prima del Grupo o Colectividad esté determinada con base en la experiencia de siniestralidad del mismo o bien de las pólizas de Seguro de Grupo o del Seguro Colectivo que pertenezcan al mismo grupo empresarial.

Para el caso de los seguros de vida, el número de Integrantes del Grupo o Colectividad no podrá ser inferior a mil al inicio de la vigencia del contrato

b) Experiencia Global, cuando la prima del Grupo o Colectividad no esté determinada con base en su Experiencia Propia

Observación: El reglamento de grupo no define experiencia propia o general de acuerdo a como se determinan los dividendos, sino a como se determina la prima.

Seguro de Grupo con Dividendos en México



RGA

Seguro de Grupo en México

Con los siguientes 2 supuestos:

1. Si para dar dividendos tomando en cuenta los resultados propios del grupo es necesario calcular la prima utilizando credibilidad total ➔ Se requiere tamaño del grupo muy grande

2. No es posible recargar la prima para cubrir el costo por dar dividendos ➔ Margen esperado probablemente negativo

Pregunta:

¿ Es posible mantener esquemas donde el dividendo es calculado tomando en cuenta los resultados propios del grupo?

RGA

Seguro de Grupo con Dividendos en México

Forma de Calcular Dividendos	**Exp. Propia**			**Exp. General**		
Información para calcular prima	**Cred. Total**	~~**Cred. Parcial**~~	~~**Tabla de Mortalidad**~~	**Cred.. Total**	**Cred. Parcial**	**Tabla de Mortalidad**
Restricción	**> 1,000 Asegurados**	**Por discutir**	**No hay Restricción**	**> 1,000 Asegurados**	**Por discutir**	**No hay Restricción**

Bibliografía

1. **Loss Models, From Data to Decisions**
   Kugman, Panjer y Willmot
   Wiley Series
2. **Introduction to Credibility Theory**
   Thomas N. Herzog
   Actex Publications
3. **Simulation**
   Sheldon M. Ross
   Harcourt Academic Press

RGA

¿Preguntas?

Aspectos Técnicos del Seguro de Vida Grupo

Ricardo Nava FSA, MAAA
Chief Actuary, Latin America
RGA Re
México
Marzo 2010

The security of experience. The power of innovation.

www.rgare.com